Dimensi Teknik Sipil, Vol. 3, No. 2, September 2001, 84-88
ISSN 1410-9530

Technical Note

APLIKASI STATISTIK EKSTRIM DAN SIMULASI MONTE CARLO DALAM PENENTUAN BEBAN RENCANA PADA STRUKTUR DENGAN UMUR GUNA TERTENTU

Wong Foek Tjong
Dosen Fakultas Teknik Sipil & Perencanaan, Jurusan Teknik Sipil, Universitas Kristen Petra

Catatan Redaksi:

Tidak banyak yasawan yang mengetahui bagaimana cara mendapatkan beban rencana dari data yang dimiliki. Makalah ini membahas penggunaan statistik ekstrim dan simulasi Monte Carlo untuk menentukan beban rencana untuk suatu umur guna tertentu. Diberikan pula beberapa contoh penggunaan kedua cara tersebut.

PENDAHULUAN

Suatu struktur didesain untuk dapat menahan beban-beban yang terjadi selama umur guna (*lifetime*) struktur itu. Oleh karena itu beban-beban yang ditetapkan untuk keperluan desain struktur terkait erat dengan umur guna struktur. Secara intuitif dapat dimengerti jika umur guna pendek, maka beban rencana kecil, demikian pula sebaliknya.

Yang menjadi masalah adalah bagaimana menentukan besarnya beban untuk merencanakan suatu struktur dengan umur guna *n* tahun, bila telah diketahui karakteristik statistik dari beban maksimum tahunan. Sebagai contoh, di suatu lokasi yang kadang-kadang terdapat angin kencang hendak didesain struktur gedung tinggi dengan umur guna 500 tahun. Untuk menentukan besarnya beban angin rencana perlu diketahui kecepatan angin maksimum 500 tahunan. Misalkan berdasarkan data kecepatan angin yang tersedia dapat disimpulkan bahwa distribusi kecepatan angin maksimum tahunan di lokasi itu adalah normal, dengan rata-rata 100 km/jam dan deviasi standar 25 km/jam. Berapa kecepatan angin nominal rencana, bila sebagai nilai nominal itu diambil nilai median kecepatan angin maksimum 500 tahunan?

Masalah seperti pada contoh di atas dapat diselesaikan dengan menerapkan model analitis statistik nilai-nilai ekstrim [1] dari suatu variabel acak atau dengan menggunakan metode simulasi Monte Carlo [1,2,3]. Tulisan ini akan memberikan ringkasan teori yang diperlukan untuk memecahkan masalah seperti pada contoh itu dan memberikan ilustrasi penerapan statistik esktrim dan simulasi Monte Carlo dengan cara memecahkan masalah itu. Perhitungan penentuan kecepatan angin nominal rencana akan dilakukan juga untuk struktur dengan umur guna 50 tahun dan 100 tahun.

Catatan: Diskusi untuk makalah ini diterima sebelum tanggal 1 November 2001. Diskusi yang layak muat akan diterbitkan pada Dimensi Teknik Sipil Volume 4, Nomor 1 Maret 2002.

STATISTIK EKSTRIM

1. Distribusi Probabilitas Maksimum yang Eksak

Misalkan X adalah variabel acak dengan PDF (*probability distribution function*) $f_x(x)$ dan CDF (*Cumulative Distribution Function*) $F_x(x)$. Tinjau sampel berjumlah n yang diambil dari populasi X; setiap sampel akan berupa kumpulan observasi ($x_1, x_2,\ldots,x_n$) yang masing-masing menyatakan nilai-nilai observasi kesatu, kedua, …, dan ke-n. Karena setiap nilai observasi tidak dapat diprediksi hasilnya, maka setiap nilai observasi dapat dipandang sebagai nilai dari suatu variabel acak, sehingga kumpulan observasi ($x_1, x_2,\ldots,x_n$) adalah realisasi dari variabel acak sampel $(X_1, X_1,\ldots X_n)$. Yang dimaksud dengan nilai maksimum dari sampel berjumlah n adalah maksimum dari $(X_1, X_1,\ldots X_n)$, yaitu variabel acak

$$Y_n = max\ (X_1, X_2,\ldots X_n) \qquad (1)$$

Dengan asumsi $X_1, X_2,\ldots X_n$ adalah variabel-

variabel acak yang bebas secara statistik (*statistically independent*) dan berdistribusi probabilitas sama seperti distribusi dari varibel acak X, maka CDF dari Y_n adalah [1]

$$F_{Y_n}(y) = [F_X(y)]^n \tag{2.a}$$

di mana n menyatakan jumlah sampel, dan PDF-nya adalah:

$$f_{Y_n}(y) = n\left[F_X(y)\right]^{n-1} f_X(y) \tag{2.b}$$

Dengan telah diketahuinya distribusi probabilitas maksimum dari sampel, maka parameter-parameter statistik dari maksimum Y_n seperti rata-rata, median, persentil, dan lain-lain dapat dihitung.

Dalam contoh telah diketahui umur guna gedung 500 tahun dan kecepatan angin maksimum tahunan berdistribusi normal, dengan rata-rata μ = 100 km/jam dan deviasi standar σ = 25 km/jam.

Bila

X : variabel acak kecepatan angin maksimum tahunan,

Y_{500} : variabel acak kecepatan angin maksimum dalam 500 tahun,

maka jumlah sampel adalah sebanyak 500 tahun dibagi dengan 1 tahun, yaitu n = 500/1 = 500. PDF dari X [4] adalah:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{25\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-100}{25}\right)^2\right) \tag{3.a}$$

CDF dari X dapat diperoleh dari integrasi (3.a) sebagai berikut;

$$F_X(x) = \frac{1}{25\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z-100}{25}\right)^2\right) dz \tag{3.b}$$

Menurut persamaan (2), distribusi probabilitas untuk Y_{500} adalah:

$$F_Y(y) = \left[\frac{1}{25\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z-100}{25}\right)^2\right) dz\right]^{500} \tag{4.a}$$

$$f_Y(y) = \frac{20}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{25\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z-100}{25}\right)^2\right) dz\right]^{499} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y-100}{25}\right)^2\right) \tag{4.b}$$

Bila kecepatan angin nominal yang dipakai untuk desain gedung itu diambil nilai median dari Y_{500}, maka nilai median itu bisa dihitung dengan cara mencari nilai y dari persamaan

$$F_Y(y) = 50\% \,. \tag{5}$$

Dengan memasukkan (4.a) ke (5) diperoleh

$$\left[\frac{1}{25\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z-100}{25}\right)^2\right) dz\right]^{500} = 0{,}5 \tag{6.a}$$

$$\frac{1}{25\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z-100}{25}\right)^2\right) dz = (0{,}5)^{0{,}002} \tag{6.b}$$

CDF dari variabel acak normal standar, $\Phi(s)$, menurut definisi [4] adalah

$$\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{s} \exp\left(-\tfrac{1}{2} z^2\right) dz \tag{7}$$

Persamaan (6.b) dinyatakan dengan CDF dari variabel acak normal standar adalah

$$\Phi\left(\frac{y-100}{25}\right) = (0{,}5)^{0{,}002} \tag{8.a}$$

Selanjutnya persamaan (8) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\Phi^{-1}\left((0{,}5)^{0{,}002}\right) = \frac{y-100}{25} \tag{8.b}$$

di mana Φ^{-1} adalah fungsi invers dari Φ.

Dengan menggunakan tabel distribusi normal standar atau menggunakan fungsi NORMSINV dari perangkat lunak *Microsoft Excel 2000* [5] diperoleh $\Phi^{-1}\left((0{,}5)^{0{,}002}\right) = 2{,}9922$. Dengan demikian;

$$\frac{y-100}{25} = 2{,}9922\,, \tag{8.c}$$

sehingga didapat y = 174,8.

Jadi, kecepatan angin rencana untuk keperluan desain gedung dengan umur guna 500 tahun adalah 174,8 km/jam.

Bila umur guna gedung 50 dan 100 tahun, dengan cara yang sama kecepatan angin rencana bisa diperoleh masing-masing dari persamaan

$$\Phi^{-1}\left((0{,}5)^{0{,}02}\right) = \frac{y-100}{25} \text{ dan } \Phi^{-1}\left((0{,}5)^{0{,}01}\right) = \frac{y-100}{25}\,.$$

Dari persamaan-persamaan itu didapatkan kecepatan angin rencana untuk umur guna gedung 50 dan 100 tahun masing-masing adalah 155,1 dan 161,6 km/jam.

2. Distribusi Asimtotik

Cara penentuan distribusi untuk Y_n seperti yang dilakukan di atas adalah cara eksak. Bila bentuk analitis dari distribusi variabel acak awal, yakni $f_X(x)$ telah diketahui, selain dengan cara eksak, distribusi probabilitas untuk Y_n dapat juga dihitung dengan cara pendekatan distribusi asimtotik dari nilai ekstrim.

Distribusi asimtotik merupakan hasil studi dari distibusi-distibusi ekstrim bila jumlah sampel n tak terhingga, khususnya studi mengenai bentuk limit atau asimtotik dari $F_{Y_n}(y)$ dan $f_{Y_n}(y)$ (2) bila $n \to \infty$. Gumbel [1] menggolongkan distribusi asimtotik menjadi tiga golongan, yaitu:

Tipe I : Bentuk eksponen ganda,
Tipe II : Bentuk eksponen,
TipeIII : Bentuk eksponen dengan batas atas ω, .

Distribusi asimtotik Tipe I mempunyai ciri adanya faktor yang berbentuk eksponen ganda, $\exp[-\exp(-A(n)y)]$ pada persamaan PDF dan CDF-nya, di mana *A(n)y* adalah fungsi linier dari variabel *y* dengan konstanta-konstanta bergantung kepada jumlah sampel *n*. Ciri distribusi asimtotik Tipe II adalah pada persamaan PDF dan CDF-nya terdapat faktor yang berbentuk eksponen

$$\exp\left[-\left(\frac{A(n)}{y}\right)^k\right],$$

di mana *A(n)/y* adalah fungsi pecahan dari variabel *y* dengan pembilang konstan bergantung kepada jumlah sampel *n,* dan *k* adalah parameter bentuk dari variabel acak *Y*. Pada persamaan PDF dan CDF dari distribusi asimtotik tipe III terdapat faktor yang berbentuk

$$\exp\left[-A(n)(\omega - y)^k\right],$$

di mana $-A(n)(\omega - y)$ fungsi dari *y* yang konstanta-konstantanya bergantung kepada jumlah sampel *n,* dan *k* adalah parameter bentuk dari variabel acak *Y*.

Bila distribusi dari variabel acak mula-mula *X* adalah normal, maka bentuk distribusi asimtotik nilai maksimum Y_n adalah distribusi asimtotik Tipe I [1]. CDF dan PDF asimtotik Tipe I adalah

$$F_{Y_n}(y) = \exp[-\exp(-\alpha_n(y-u_n))] \quad (9.a)$$

$$f_{Y_n}(y) = \alpha_n \exp(-\alpha_n(y-u_n)) \exp[-\exp(-\alpha_n(y-u_n))] \quad (9.b)$$

Keterangan:
u_n : nilai terbesar karakteristik dari variabel acak asal *X*,
α_n : suatu kebalikan dari ukuran penyebaran Y_n .

Parameter-parameter u_n dan α_n masing-masing dihitung dengan persamaan

$$F_X(u_n) = 1 - \frac{1}{n} \quad (10)$$

dan persamaan

$$\alpha_n = nf_X(u_n) \quad (11)$$

Harga u_n mendekati harga 37 persentil dari Y_n, artinya di antara populasi nilai-nilai maksimum dari sampel berjumlah *n*, sekitar 37% kurang dari u_n, atau sekitar 63% lebih dari u_n.

Di dalam contoh diketahui bahwa distribusi awal adalah normal, maka distribusi asimtotik dari kecepatan angin maksimum dalam 500 tahun (Y_{500}) adalah distribusi asimtotik Tipe I (9). Parameter u_n dihitung dengan memasukkan n = 500 ke dalam (10), yaitu

$$F_X(u_n) = 1 - \frac{1}{500} = \frac{499}{500} \quad (12)$$

Selanjutnya persamaan (12) dinyatakan dengan CDF dari variabel acak normal standar sebagai berikut

$$\Phi\left(\frac{u_n - 100}{25}\right) = \frac{499}{500}, \quad (13.a)$$

sehingga didapatkan

$$\frac{u_n - 100}{25} \approx 2{,}878 \quad (13.b)$$

$$u_n = u_{500} \approx 172{,}0 \quad (13.c)$$

Parameter α_n dihitung dengan memasukkan n = 500 dan (13.c) ke dalam (11), yaitu

$$\alpha_n = 500\, f_X(u_{500})$$
$$= \frac{500}{25\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u_{500} - 100}{25}\right)^2\right), \quad (14.a)$$

sehingga didapatkan $\alpha_n = \alpha_{500} \approx 0.1268$. (14.b)

Nilai median dari Y_{500} diperoleh dengan mencari nilai *y* dari persamaan

$$F_Y(y) = 50\% \quad (15.a)$$

Langkah-langkah matematis pencarian nilai *y* adalah sebagai berikut:

$$\exp[-\exp(-\alpha_n(y-u_n))] = 0{,}5 \quad (15.b)$$

$$\exp(-\alpha_n(y-u_n)) = -\ln(0{,}5) \quad (15.c)$$

$$\alpha_n(y-u_n) = -\ln(-\ln(0{,}5)) \quad (15.d)$$

Parameter-parameter α_n dan u_n telah diketahui dari (13.c) dan (14.b), sehingga (15.d) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\alpha_{500}(y - u_{500}) = -\ln(-\ln(0{,}5)) \quad (15.e)$$

Akhirnya dari (15.e) diperoleh

$$y \approx 174{,}8 \tag{15.f}$$

Dengan demikian kecepatan angin rencana untuk gedung dengan umur guna 500 tahun adalah 174,8 km/jam. Hasil ini sama seperti yang diperoleh dari perhitungan kecepatan angin rencana dengan menggunakan distribusi maksimum eksak.

Untuk kasus umur guna gedung 50 dan 100 tahun, parameter u_{50} dan u_{100} diperoleh dengan cara memasukkan masing-masing n = 50 dan n = 100 ke dalam (10), sehingga didapatkan:

$$\Phi\left(\frac{u_{50}-100}{25}\right)=\frac{49}{50}\ , \qquad \Phi\left(\frac{u_{100}-100}{25}\right)=\frac{99}{100}$$

$$u_{50} \approx 151{,}3\ , \qquad u_{100} \approx 158{,}2$$

Selanjutnya parameter α_{50} dan α_{100} dihitung sebagai berikut:

$$\alpha_{50} = \frac{50}{25\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u_{50}-100}{25}\right)^2\right) \approx 0{,}09684$$

$$\alpha_{100} = \frac{100}{25\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u_{100}-100}{25}\right)^2\right) \approx 0{,}1066$$

Nilai-nilai median dari Y_{50} dan Y_{100} didapatkan dengan menyelesaikan persamaan-persamaan:

$\alpha_{50}(y-u_{50}) = -\ln(-\ln(0{,}5))$,diperoleh $y \approx 155{,}1$

$\alpha_{100}(y-u_{100}) = -\ln(-\ln(0{,}5))$,diperoleh $y \approx 161{,}6$

Jadi, kecepatan angin rencana untuk umur guna gedung 50 dan 100 tahun masing-masing adalah 155,1 dan 161,6 km/jam. Hasil ini juga sama seperti hasil yang diperoleh dengan cara menggunakan distribusi eksak.

Di dalam contoh itu tidak terlihat adanya perbedaan hasil antara distribusi maksimum eksak dan distribusi asimtotik. Hal ini disebabkan bentuk distribusi maksimum eksak untuk jumlah sampel (n) 50, 100, dan 500 sangat mirip dengan bentuk distribusi asimtotik. Perbedaan antara distribusi maksimum eksak dan distribusi asimtotik dari maksimum akan jelas terlihat untuk n kecil.

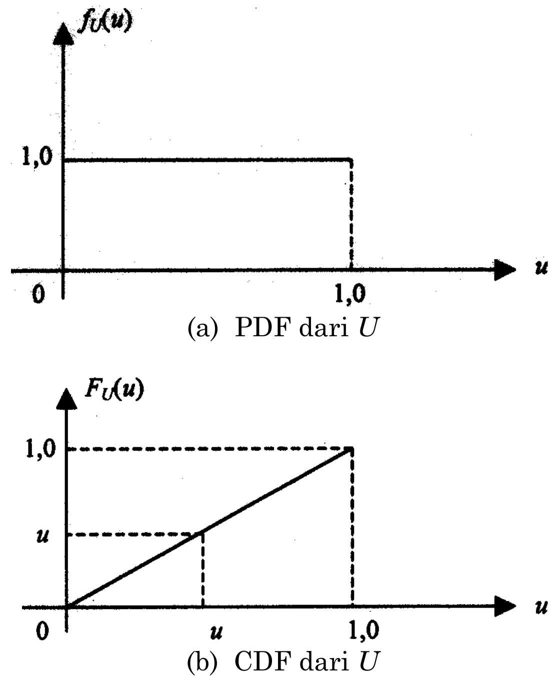
SIMULASI MONTE CARLO

Simulasi Monte Carlo adalah metode pengambilan sampel ke mesin atau komputer dengan menggunakan bilangan-bilangan acak (*random numbers*). Prinsip kerja dari simulasi Monte Carlo adalah membangkitkan angka-angka acak atau sampel dari suatu variabel acak yang telah diketahui distribusinya. Oleh karena itu, dengan simulasi Monte Carlo seolah-olah dapat diperoleh data dari lapangan, atau dengan perkataan lain simulasi Monte Carlo meniru kondisi lapangan secara numerik.

Simulasi Monte Carlo merupakan alat rekayasa yang ampuh untuk menyelesaikan berbagai persoalan rumit di dalam bidang Probabilitas dan Statistika. Meskipun demikian, simulasi Monte Carlo tidak memberikan hasil yang eksak, karena pada hakekatnya simulasi Monte Carlo adalah suatu metode numerik. Seperti pada umumnya metode numerik, simulasi Monte Carlo membutuhkan banyak sekali iterasi dan usaha perhitungan, khususnya untuk masalah-masalah yang melibatkan peristiwa-peristiwa langka (*very rare events*). Oleh karena kelemahan-kelemahan tersebut, sebaiknya simulasi Monte Carlo baru digunakan bila metode analitis tidak tersedia atau metode pendekatan (misalnya pendekatan orde pertama dari fungsi variabel acak yang nonlinier) tidak memadai.

Prosedur pembangkitan nilai-nilai untuk variabel acak X yang sesuai dengan CDF-nya $F_X(x)$ adalah sebagai berikut:

1. Bangkitkan suatu nilai u_j dari variabel acak U yang berdistribusi seragam standar (Gambar 1).



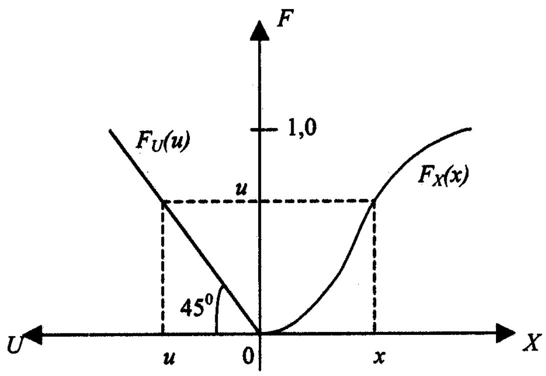
(a) PDF dari U

(b) CDF dari U

Gambar 1. PDF dan CDF dari Variabel Acak U Berdistribusi Seragam Standar.

2. Hitung nilai $x_j = F_X^{-1}(u_j)$ (Gambar 2).
3. Ulangi langkah No.1 dan No.2 sampai dengan $j =$ jumlah sampel yang diinginkan.

Ketiga prosedur di atas sangat efektif dan praktis jika digunakan komputer berkecepatan tinggi.



Gambar 2. Hubungan antara *U* dan *X*.

Contoh penetapan kecepatan angin rencana untuk keperluan desain gedung dengan umur guna 500 tahun dapat diselesaikan dengan simulasi Monte Carlo. Algoritma program simulasi Monte Carlo untuk memecahkan masalah itu adalah sebagai berikut:

1. Bangkitkan 500 angka acak yang berdistribusi seragam. Diperoleh angka-angka u_1, u_2, …, u_{500}.
2. Untuk setiap angka acak itu hitung nilai fungsi invers CDF dari variabel acak *X*, yaitu hitung $x_i = 100 + 25\Phi^{-1}(u_i)$, i = 1, 2,…,500. Diperoleh angka-angka x_1, x_2, …, x_{500} .
3. Tentukan nilai maksimum dari x_1, x_2, …, x_{500}. Diperoleh satu sampel dari variabel acak Y_{500}, yaitu y_1 = maksimum (x_1, x_2, …, x_{500})
4. Ulangi proses perhitungan No.1, 2, dan 3 sampai diperoleh sampel-sampel nilai maksimum y_1, y_2, … ,y_m, m = banyaknya sampel maksimum yang diinginkan.
5. Hitung median dari sampel-sampel y_1, y_2, … , y_m. Nilai median ini merupakan jawaban dari pertanyaan dalam contoh.

Dari algoritma tersebut dibuat program komputer untuk melakukan simulasi dan kemudian program tersebut dieksekusi untuk nilai *m* tertentu yang diinginkan. Semakin besar *m*, hasil simulasi Monte Carlo semakin dapat diandalkan, tetapi semakin banyak usaha komputasi yang dilakukan. Jika ditetapkan m=1000, hasil yang dapat diperoleh adalah median dari Y_{500} = 175,3 ,berarti kecepatan angin rencana untuk keperluan desain gedung dengan umur guna 500 tahun adalah 175,3 km/jam.

Untuk kasus umur guna 50 dan 100 tahun, masing-masing perlu dibangkitkan 50 dan 100 angka acak yang berdistribusi seragam. Jadi, semua angka 500 di dalam algoritma tersebut diganti masing-masing dengan angka 50 dan 100. Hasil yang dapat diperoleh adalah kecepatan angin rencana untuk umur guna 50 = 155,0 km/jam dan untuk umur guna 100 tahun = 161,8 km/jam.

DAFTAR PUSTAKA

1. Ang, A.H.S. and Tang, W.H., *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*, Volume II Decision, Risk and Reliability, John Wiley and Sons, New York, 1990.

2. Hart, Gary C., *Uncertainty Analysis, Loads, and Safety in Structural Engineering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.

3. Harr, Milton E, *Reliability-Based Design in Civil Engineering*, McGraw-Hill, New York, 1987.

4. Ang, A.H.S. and Tang, W.H., *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*, Volume I Basic Principles, John Wiley and Sons, New York, 1975.

5. Levine, D.M., Berenson, M.L., and Stephan, David, *Statistics for Managers Using Microsoft Excel*, Second Edition, Prentice Hall International, New Jersey, 1999.